

**ARBITRAGE PRICING THEORY:  
EVIDENCIA EMPÍRICA PARA EL MERCADO ACCIONARIO COLOMBIANO, 2005 - 2012.**

**CARLOS DANIEL ARANGO RESTREPO<sup>1</sup>**

**GABRIEL FELIPE GONZÁLEZ TABARES<sup>2</sup>**

**DAVID PELÁEZ GÓMEZ<sup>3</sup>**

**HERMILSON VELÁSQUEZ CEBALLOS<sup>4</sup>**

**RESUMEN**

*Ross (1976) introduce un modelo alternativo al CAPM para explicar el rendimiento de los activos financieros. El modelo APT de Ross propone una estructura multifactorial, en la cual el rendimiento de un activo financiero es función de una tasa libre de riesgo y de variables macroeconómicas. En este trabajo se utiliza el método de componentes principales para resumir la información de 23 variables macroeconómicas y financieras y luego se utilizan estos resultados para modelar el rendimiento en exceso sobre los títulos de deuda pública, TES, del Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia. Las componentes encontradas se analizan a la luz de la teoría económica y financiera y se encuentra evidencia para afirmar que la percepción del riesgo es el factor con importancia relativa más alta para la explicación del exceso de rendimiento del IGBC.*

**Palabras Clave:** Fijación de precios de activos, Análisis de Componentes Principales, Análisis Factorial.

**Clasificación JEL:** C38, G11, G12

---

<sup>1</sup> Economista y Especialista en Finanzas, Universidad EAFIT. Candidato a Magíster en Administración Financiera. Profesor de cátedra en pregrado y posgrado Universidad de Medellín. Contacto: [carangor@eafit.edu.co](mailto:carangor@eafit.edu.co).

<sup>2</sup> Economista y Especialista en Finanzas, Universidad EAFIT. Candidato a Magíster en Administración Financiera. Contacto: [ggonzal1@eafit.edu.co](mailto:ggonzal1@eafit.edu.co).

<sup>3</sup> Negociador Internacional y Especialista en Finanzas, Universidad EAFIT. Candidato a Magíster en Administración Financiera. Contacto: [dpelaez3@eafit.edu.co](mailto:dpelaez3@eafit.edu.co).

<sup>4</sup> Doctor en Ciencias Matemáticas, Universidad Politécnica de Valencia. Docente de tiempo completo Universidad EAFIT. Contacto: [evelas@eafit.edu.co](mailto:evelas@eafit.edu.co). Asesor del Trabajo.

Los datos utilizados para la realización del trabajo están disponibles por solicitud. Por favor contactarse con los autores.

**ARBITRAGE PRICING THEORY:  
EMPIRICAL EVIDENCE FOR THE COLOMBIAN STOCK MARKET, 2005 - 2012.**

**CARLOS DANIEL ARANGO RESTREPO  
GABRIEL FELIPE GONZÁLEZ TABARES  
DAVID PELÁEZ GÓMEZ  
HERMILSON VELÁSQUEZ CEBALLOS**

***ABSTRACT***

*Ross (1976) introduced an alternative to the CAPM model to explain the returns of financial assets. Ross' Arbitrage Pricing Theory (APT) proposes a multi-factor structure in which the return of a given financial asset is a function of a free-risk rate and a series of macroeconomic variables. In this paper the principal component analysis is used to summarise the information contained in 23 macroeconomic and financial variables and then the components retained are used to model the excess of return over the local currency government bonds, TES, of the Colombian Stock Exchange General Index (IGBC). The retained principal components were analysed in the light of the economic and financial theory and evidence was found to assert that the risk perception has the highest relative importance to explain the IGBC excess of return.*

**Key words:** Asset Pricing, Principal Components Analysis, Factor Analysis.

**JEL Classification:** C38, G11, G12.

## I. Introducción

En general, el problema al que se enfrenta cualquier agente participante en los mercados financieros es a un *trade off* entre riesgo y rendimiento esperado. Es por esto que es de suma importancia para los inversionistas contar con metodologías que les permitan hacer una valoración cuantitativa del rendimiento esperado de la posible inversión en un activo financiero y el riesgo asociado a la misma en que incurriría si decide llevarla a cabo. La teoría financiera moderna ha tratado dicho problema desde mediados del siglo XX. El primer aporte de importancia en este sentido fue introducido por Harry Markowitz en 1952, proponiendo que cualquier inversionista racional tendría como objetivo la maximización del rendimiento y la minimización del riesgo, lo cual puede ser conseguido a través de portafolios eficientemente diversificados. Sin embargo la teoría de Markowitz no enfocaba su análisis hacia qué factores podían ser considerados como determinantes del rendimiento y el riesgo de los activos financieros.

Posteriormente Sharpe *et al* introducen el modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*, por sus siglas en inglés), en el cual se propone que el rendimiento de un activo financiero está únicamente en función del exceso de rendimiento del mercado, calculando un parámetro Beta que se interpreta como una medida de riesgo sistemático entre el rendimiento del activo  $i$  y el mercado; Beta medido como la razón entre la covarianza de los rendimientos del activo y el mercado, y la varianza de los rendimientos del mercado. Aunque el CAPM es ampliamente usado por inversionistas y agentes en general de los mercados financieros, el modelo supone ciertas limitaciones de análisis que le han valido no pocas críticas, especialmente el hecho de que considera como única variable explicativa del rendimiento de los activos financieros el exceso de rendimiento anteriormente mencionado, y excluye del análisis factores que se pueden justificar desde la teoría económica como determinantes del rendimiento de los activos.

La teoría del arbitraje, APT (*Arbitrage Pricing Theory*, por sus siglas en inglés) nace como un modelo alternativo al CAPM como método para explicar el rendimiento de los activos financieros. La teoría APT fue desarrollada inicialmente por Ross (1976). Es un modelo de un periodo en el cual cada inversionista considera que las propiedades estocásticas de los retornos de los activos de capital son consistentes con una estructura de factores<sup>5</sup>. El modelo sugiere que dichos factores que explican los retornos de los activos de capital deben ser

---

<sup>5</sup> HUBERMAN y WANG (2006), pp. 1

variables macroeconómicas justificables desde la teoría económica; estudios empíricos para los mercados estadounidenses han demostrado que al menos tres factores han sido encontrados para el proceso generador de los retornos<sup>6</sup>.

El propósito de este artículo es la construcción de factores que expliquen, a la luz de la teoría económica y financiera, el exceso de rendimiento del IGBC<sup>7</sup>, bajo el enfoque multifactorial de la teoría APT.

Si un inversionista puede determinar con cierto grado de certeza las variables que influyen en la determinación del retorno de los rendimientos de los activos y posee evidencia estadística de la magnitud de su impacto podrá enfocar su análisis sobre dichas variables para tomar decisiones de inversión, por tanto resulta fundamental que los inversionistas y los agentes participantes de los mercados financieros cuenten con metodologías que les permitan establecer las variables que son relevantes para la determinación de los rendimientos de los activos financieros, así como poder cuantificar la magnitud del impacto que ellas tienen sobre el retorno de los activos de capital, más aún cuando se ha evidenciado en los mercados que los precios y, por consiguiente, los rendimientos de los activos financieros reaccionan, con mayor o menor rapidez, ante cambios en diferentes variables medibles en la economía. La teoría financiera moderna se ha enfocado en el estudio de los factores que pueden ser fuente de riesgo sistemático<sup>8</sup> (es decir, aquel que no puede reducirse a través de la diversificación).

La motivación, entonces, de éste trabajo es encontrar evidencia empírica que valide o no la aplicación de un modelo basado en la teoría APT para el caso colombiano, teniendo como referencia el IGBC, determinando la significancia estadística de las variables seleccionadas para incluir en el modelo. Este trabajo pretende seleccionar algunas variables económicas que puedan explicar el retorno de los activos financieros, teniendo en cuenta la influencia que puedan tener según la teoría económica y trabajos empíricos que se hayan realizado con anterioridad. Asimismo, una vez seleccionadas las variables que puedan considerarse relevantes se procederá a identificar los factores o componentes que se desprenden de dichas variables, y por último se pretende construir un modelo a la luz de la filosofía de la teoría APT y

---

<sup>6</sup> ROLL y ROSS (1980).

<sup>7</sup> La elección del IGBC para la construcción del modelo se debe a las limitaciones de información que ofrecen los otros índices accionarios disponibles para el mercado accionario colombiano, el COLCAP y el COL20, disponibles solo desde 2008.

<sup>8</sup> CHEN, ROLL y ROSS (1986)

verificar a través de un ejercicio econométrico si hay evidencia empírica para el mercado colombiano.

El presente trabajo se compone de cinco partes, siendo la presente introducción la primera de ellas. Posteriormente se realizará una revisión de la literatura acerca de la teoría APT y trabajos empíricos relacionados; luego se presentará la metodología utilizada y la descripción de las variables utilizadas. La cuarta sección contendrá la estimación econométrica del modelo propuesto y el análisis de los resultados esperados y por último se concluirá.

Se encontró que al utilizar las metodología del análisis de componentes principales y el análisis factorial se pueden retener y categorizar entre 5 y 6 factores/componentes que explican una importante parte de la varianza de la base de datos originales. Posteriormente al realizar la estimación econométrica del modelo APT a partir de los componentes retenidos, se encontró evidencia de que al menos 5 de ellos resultan estadísticamente significativos para explicar el exceso de rendimiento del IGBC, siendo la percepción de riesgo el componente relativamente más importante para dicha explicación.

## **II. Revisión de la Literatura**

Durante las décadas recientes el modelo APT ha cobrado una importancia creciente dentro de la teoría financiera moderna. Es así como numerosos autores han centrado su atención en el modelo, realizando estudios teóricos y empíricos para validar la relevancia del modelo, e incluso comparar su capacidad explicativa respecto al modelo CAPM para explicar el rendimiento de los activos financieros.

En esta sección se realiza una revisión de la literatura relevante para el estudio del modelo APT. A través de esta revisión se encontraron múltiples trabajos empíricos que compararon el CAPM con el APT y testearon la validez del modelo APT para diferentes plazas bursátiles, encontrándose en la mayoría de ellos evidencia empírica que respalda la relevancia de la teoría APT para explicar el rendimiento de los activos. Incluso algunos de los trabajos concluyeron que el APT ofrece una capacidad explicativa superior al tradicional CAPM gracias a la inclusión de varias variables explicativas.

Asimismo, la revisión de la literatura realizada fue especialmente útil para la elección de las variables y la metodología que se empleará en este artículo.

Ross (1976), partiendo de la limitada capacidad explicativa que tiene la prima de mercado como determinante del exceso de retorno de un activo financiero, la relación lineal entre el retorno del activo y la prima de mercado, y partiendo de la negación de la significancia del error en el modelo del CAPM, plantea una teoría alternativa para el precio de activos riesgosos, donde el error del CAPM se puede analizar como un vector de varios elementos aleatorios y otro vector constante  $\eta$  x1 con valores iguales a 1. Los pasos en la estructuración del modelo que sugiere Ross son:

Paso 1. Formar un portafolio de arbitraje bien diversificado,  $\eta^9$ ,  $\eta e = 0$ , donde e es el término de error.

Paso 2. Por la Ley de los grandes números<sup>10</sup>, la influencia del término de error independiente se convierte en insignificante en un portafolio bien diversificado

$$\eta \tilde{x} = \eta E + (\eta \beta) \tilde{\delta} + \eta \in \mathbb{R}$$

$$\approx \eta E + (\eta \beta) \tilde{\delta} \in \mathbb{R}$$

Paso 3. Se plantea una condición para que el portafolio de arbitraje no presente riesgo sistemático.

$$\eta \beta = 0$$

$$\eta \tilde{x} = \eta E$$

Paso 4. El retorno  $\eta \tilde{x}$  es equivalente al  $\eta E$ , por lo tanto para prevenir arbitraje se debe tener que  $\eta E = 0$ , con la restricción para  $\eta$  tal que  $\eta e = \eta \beta = 0$ , E que es retorno del activo sería:

$$E_i = \rho + \lambda \beta_i$$

Donde p es la tasa de retorno en todos los portafolios con  $\beta = 0$ , es decir sin riesgo sistemático.

$$E_i = \rho + (E_m - \rho) \beta_i (**)$$

<sup>9</sup> Si bien Ross (1976) parte de la conformación de un portafolio eficientemente diversificado, en este trabajo se utiliza el IGBC como *proxy* de dicho portafolio, lo cual se justifica en la sección dedicada al tratamiento de los datos.

<sup>10</sup> Las leyes de los grandes números explican por qué el promedio de una muestra al azar de una población de gran tamaño tenderá a estar cerca de la media de la población completa

La ecuación anterior es la condición para la equivalencia de la teoría de arbitraje y si  $\delta$ , es factor del retorno del mercado se tendrá que  $\beta_i$  se aproximará a  $b_i$ . Se sugiere entonces que (\*\*) se mantiene en condiciones de equilibrio y también en cualquier clase de desequilibrio y que el portafolio de mercado no juega un papel importante.

La Teoría del Arbitraje requiere que se cumplan supuestos como que los inversionistas tienen expectativas similares y están de acuerdo en los coeficientes  $\beta^s$ , si la identificación de las creencias *ex ante* se transforman en observaciones posteriores con resultados empíricamente relevantes. Si los supuestos no se cumplen se presenta un desequilibrio y el interés se centra en el estudio del impacto de la información en los mercados.

Roll y Ross (1980), estiman un modelo cuyos coeficientes betas utilizan la técnica de análisis factorial, los coeficientes se denominan “cargas factoriales” y son inferidos desde la estimación de la matriz de covarianzas. Aunque el trabajo no permite identificar variables que pueden determinar el efecto sobre el exceso de retorno de una acción, si encuentra que hay razones como la relación P/E<sup>11</sup> que tienen un poder explicativo en los excesos de retornos. En este trabajo se puede concluir que es necesario identificar variables significativas dentro de los factores para corroborar que la variabilidad sistemática afecta los retornos esperados.

Chen (1983) utiliza datos de rendimiento diarios de 180 acciones del mercado estadounidense para el periodo 1963 – 1978 para comparar la evidencia arrojada por el modelo CAPM respecto del modelo APT, haciendo estimaciones para diferentes subperiodos y encontrando que el desempeño del modelo APT es bueno. En este trabajo, el autor usa la técnica de análisis factorial solo como una herramienta estadística para determinar los factores comunes que explican el rendimiento de las acciones seleccionadas para el estudio, dejando en claro que el desarrollo del APT es independiente de la técnica de análisis factorial. Como lo anota el autor, “una de las dificultades para validar empíricamente el APT es que no nos dice cual debería ser el número de factores comunes a usar”<sup>12</sup>, sin embargo el mismo autor cita otros estudios previos llegando a la conclusión de que el número de factores no debería ser mayor que 5<sup>13</sup>. El estudio llega a la conclusión de que el modelo APT se comporta de una mejor manera que el CAPM para explicar el rendimiento de las acciones seleccionadas durante el periodo de análisis.

---

<sup>11</sup> Price-earnings ratio

<sup>12</sup> CHEN (1983), pp. 1397

<sup>13</sup> Ver estudios ROLL & ROSS (1980) y REINGANUM (1981)

Chen, Roll y Ross (1986), uno de los trabajos iniciales muy referenciado para la prueba del modelo APT en EEUU e Inglaterra muestra que cambios en las variables macroeconómicas generan cierto nivel de riesgo y afectan el retorno de los activos. Las variables que afectan el retorno de mercado accionario son: el spread entre las tasas de interés de corto y largo plazo, es decir, mide el riesgo de plazo en la estructura de tasas; inflación Esperada y no Esperada; la producción industrial; y, el spread en la tasa de los bonos de alta y baja calidad crediticia. También encuentran que ni el portafolio de mercado, el consumo agregado ni los precios del petróleo son generadores de riesgo que influyan en los retornos de las acciones. Este trabajo será tomando como una referencia para probar si estas variables o *proxy* de estas variables podrían aplicar para un modelo APT del mercado colombiano.

Connor y Korajczyk (1988) desarrollan el ejercicio bajo la técnica de componentes principales, donde los dos principales aspectos que se diferencian de Faff (1988) son: que permite factores de riesgos que varían en el tiempo y que envuelve un análisis de componentes principales de una matriz transversal de series de datos (en lugar de los datos transversales y la matriz de varianza y covarianza). A pesar que el APT presenta mejores resultados que el CAPM, ningún modelo puede explicar adecuadamente las diferencias en precios en los activos financieros australianos. Los datos cubren 165 meses desde enero de 1974 a septiembre de 1987 y es dividido entre tres subperiodos de 55 meses.

Abeysekera y Mahajan (1987) construyeron siete portafolios a partir de 40 acciones listadas en LSE (London Stock Exchange) seleccionadas al azar, para los portafolios se determina el número de factores necesario para explicar el exceso de rendimiento de dichos portafolios, también se contrasta la hipótesis de que la tasa libre de riesgo, medida como el rendimiento de las notas del tesoro británico a 90 días, es igual al intercepto del modelo de regresión. El estudio no encuentra evidencia de que el modelo APT pueda ser aplicado a los portafolios contruidos con las acciones seleccionadas.

McElroy y Burmeister (1988) también encontraron que el modelo APT tiene una mayor capacidad explicativa que el CAPM, al incluir en su modelo variables como la prima de default. Autores como Sharpe (1982), han demostrado que otros factores pueden mejorar la capacidad explicativa del modelo APT frente al CAPM al incluirse atributos como el tamaño de la compañía, el sector al que pertenece y ratios financieros de la compañía como la rentabilidad del dividendo, el P/E Ratio, y el P/BV Ratio. Este trabajo avala la utilización de un índice como una proxy de un portafolio eficiente.



Hamao (1988), realiza estimaciones para otros países, una de ellas es la investigación empírica sobre el modelo APT para el mercado Japonés a partir de variables macroeconómicas. Los factores que Hamao (1988) examina son: 1) Producción Industrial; 2) Inflación; 3) Confianza del Inversionista; 4) Tasa de Interés; 5) Tasa de Cambio; 6) Precios del petróleo. Adicionalmente, Hamao (1988) prueba el beta del modelo CAPM para el mercado japonés, encontrando que el beta no captura los riesgos adicionales por los cambios en las variables macroeconómicas.

Chen (1991), continúa su investigación sobre la relación entre los cambios de las variables macroeconómicas y los cambios en las oportunidades de inversión en el mercado accionario; esta investigación utiliza el crecimiento rezagado de la producción del país, la prima por riesgo de impago (default), las tasas de interés de corto plazo y el ratio de precio por dividendo del mercado, como variables que pueden indicar el crecimiento actual y futuro de la economía de un país. En este trabajo se muestra que existe correlación negativa entre los retornos y el crecimiento económico reciente y una correlación positiva de los retornos con el crecimiento económico futuro y que mientras se puede pronosticar macroeconómicamente el desempeño de un país, es posible pronosticar los excesos de retornos que puede presentar el mercado accionario, evidenciando la posibilidad de tener un modelo de arbitraje.

Faff (1992) realiza pruebas sobre las ecuaciones transversales impuestas por el APT en una regresión multivariada de los excesos de los retornos en los factores derivados. Se utilizan versiones de un paso e iterativas y se comparan los resultados con el CAPM.

El trabajo inicial de Roll y Ross (1980) sugiere entre tres y cuatro factores, mientras que para el caso australiano, se indican tres factores según la evidencia producida por Faff (1988).

Oyama (1997), examina la relación de las variables macroeconómicas y los precios de las acciones para el caso de Zimbabwe, usando el modelo de descuento de dividendos, modelo de correcciones de errores y el modelo multifactor. El trabajo concluye que a pesar del acelerado crecimiento del mercado accionario producido por la liberalización, se puede estimar que los agregados monetarios y el mercado de tasas de interés explican también el rápido crecimiento del mercado de renta variable en Zimbabwe. Aún así, la contribución de estas variables macroeconómicas, no explican la volatilidad de los retornos de las acciones durante el periodo 1993 y 1994.

Navarro López (2000), con información de México utiliza dos metodologías, una basada en el análisis de regresión y otra basada en el análisis de factores; en ambos modelos se encontró

consistencia con el modelo APT entre enero de 1992 y junio de 1998. Las variables significativas de este modelo son: Dow Jones, Certificados de Tesorería en EEUU, el tipo de cambio, las exportaciones, algunas variables financieras y monetarias como el M1 y rendimientos de los papeles comerciales. A diferencia de otros trabajos de referencia, el modelo no encontró significativas variables como: la inflación, el desempleo, la producción industrial.

Sentana y Fiorentini (2001) evalúan los efectos de la heterocedasticidad dinámica sobre modelos de análisis factorial. Dado que el modelo APT es una aplicación muy utilizada en finanzas, los resultados encontrados por los autores tienen importantes implicaciones para los trabajos empíricos aplicados al APT. Los autores concluyeron que si “la variación de los momentos condicionales es explícitamente reconocida en la estimación, los problemas de identificación son usualmente mitigados”<sup>14</sup>.

Reisman (2002) examina varios aspectos del modelo APT. Si bien este no es un estudio empírico, el autor demuestra matemáticamente que aunque los factores que determinan el rendimiento de los activos no se conozcan, el APT se comporta bien si se logra encontrar una proxy adecuada para dichos factores. Una de las mayores críticas al modelo APT es que los factores no son identificados en términos de fundamentales económicos. Por esta razón, uno de los mayores aportes de Reisman (2002) es que introduce una condición sobre la proxy de estimación sin hacer referencia a los factores. Respecto a esto, el autor anota: “nuestro modelo implica que nos es de importancia cuales son los factores. Todo lo que necesitamos para obtener una estimación aproximada del APT es una proxy admisible de la dimensión apropiada”<sup>15</sup> (que debe ser igual a la dimensión de los factores que explican el rendimiento). El estudio concluye que, bajo el supuesto de que no existe arbitraje, existe una relación multibeta aproximada relativa a cualquier proxy admisible de una dimensión igual a la del número de factores.

S. Dhankar y Singh (2005) testearon el modelo APT en el mercado accionario de la India usando retornos semanales y mensuales para 158 acciones de capitalización de mercado mediana y grande en el periodo 1991-2002; los autores utilizaron un análisis de componentes principales para estimar los factores que influyen el rendimiento de las acciones. El estudio encontró que un modelo APT con múltiples factores provee una mejor indicación de riesgo y tasa de retorno esperada que un modelo CAPM que sólo usa el beta como componente de

---

<sup>14</sup> SENTANA y FIORENTINI (2001), pp. 159

<sup>15</sup> REISMAN (2002), pp. 379

análisis de riesgo. El trabajo también encontró que en todos los portafolios contruidos se hallaron por lo menos 4 variables explicativas con coeficientes estadísticamente significativos, que evidencian la validez del modelo en dicho mercado; las variables no se mencionan explícitamente, ya que la finalidad del trabajo era probar cual modelo (APT vs. CAPM) generaba mejores resultados.

Febrian y Herwany (2010), con datos para tres diferentes períodos, la precrisis (1992-1997), la crisis (1997-2001) y la post-crisis (2001-2007), investigan la pertinencia del CAPM y del APT para explicar los excesos de retorno sobre los portafolios negociados en la Bolsa de Valores de Yakarta (siglas en inglés, JKSE), para determinar el efecto de valores inesperados sobre algunas variables macroeconómicas tales como: inflación, producción, tasa de cambios, spread sobre las tasas a un mes de los depósitos bancarios sobre la tasa del Banco Central.

El estudio muestra que el modelo APT tiene un mayor poder de explicación que el CAPM, debido a que el coeficiente de determinación ajustado es 94%, mayor al de CAPM que es igual a 90.07%, sin embargo se encuentra una relevancia diferente de los modelos dependiendo del período en el que se analicen, por ejemplo en la precrisis y comienzo de la desaceleración el CAPM es más efectivo igualmente para períodos donde se presentan pobres comportamientos en las cuatro variables, siendo diferente para la crisis, definida como el pobre desempeño de las variables macroeconómicas, específicamente alta inflación y alta volatilidad de la tasa de cambio, donde el APT presenta mejores resultados. Los resultados muestran que las variables que tienen mayor relación con el exceso de retornos son el índice de producción y el spread de las tasas de interés, además que los coeficientes de la regresión son significativos con signos positivos.

Londoño, Lopera y Restrepo (2010) en uno de los pocos trabajos aplicados al mercado colombiano, utilizan la metodología de redes neuronales multicapas para relacionar el IGBC con fundamentales económicos y variables financieras, proponiendo dos modelos: un APT tradicional con factores macroeconómicos y un APT modificado, que además de factores macroeconómicos incluye un indicador de las bolsas del mundo. Los resultados encontrados indican que el APT tradicional “se ajusta mejor para predecir el mercado accionario colombiano”<sup>16</sup>. En el estudio, los autores seleccionan variables macroeconómicas y financieras, las cuales agregan a través del método de componentes principales, llegando a construir tres componentes principales a saber: El rendimiento de las letras del tesoro estadounidense, un

---

<sup>16</sup> LONDOÑO, LOPERA y RESTREPO (2010), pp. 42

componente que reúne los índices de las bolsas más importantes del mundo y un componente de las tasas de interés. En el estudio se concluye que el APT tradicional tiene una mejor capacidad explicativa para el mercado accionario colombiano.

Bontas y Odagescu (2011) testearon la validez del modelo APT para un portafolio de 10 acciones consideradas Blue Chips dentro de la Bolsa de Valores de Bucarest (BVB, Bursa de Valori Bucuresti, por sus siglas en rumano) para el periodo 2003 – 2008; una versión del modelo APT, incluyendo como variables explicativas el rendimiento del portafolio propuesto la producción industrial, la preferencia por el riesgo<sup>17</sup>, la preferencia por el plazo<sup>18</sup> y la inflación, muestra la no significancia estadística de dichos factores, “por lo que los rendimientos de dichos instrumentos no pueden ser explicados a través de la perspectiva de esos factores”<sup>19</sup>. Una alternativa que proponen los autores replica un modelo construido por Morgan Stanley que considera como factores explicativos del rendimiento el crecimiento del PIB, los tipos de interés de largo plazo, la tasa de cambio frente a una canasta de monedas, el portafolio de mercado y el IPC, sin embargo los resultados obtenidos son similares a los del primer modelo testeado. Por último, los autores realizaron un análisis de componentes principales con base a los factores utilizados en los modelos anteriores añadiendo el BET – C (Índice de la BVB) y se encuentra resultados estadísticamente significativos, que para el periodo analizado, el rendimiento del portafolio construido con 10 acciones de la bolsa de valores de Bucarest está “correlacionado sólo con la preferencia por el riesgo, la preferencia por el tiempo y la evolución del índice BET-C”<sup>20</sup>.

Sabetfar, Fan Fah y Mohd (2012), realizan su estudio para el *Teherán Stock Exchange* como en el principal Mercado de capitales de Irán, basado en leyes islámicas. Los inversionistas no tienen permitido apalancarse para financiar sus inversiones y por lo tanto no se permite negociar en margen; por lo tanto *hedge funds*, fondos de arbitraje y fondos de especulación de corto plazo están prohibidos. Realizan un análisis de componentes principales y de correlación canónica, con datos mensuales de 17 años desde el 20 de marzo de 1991 hasta el 19 de marzo de 2008, considerando la crisis de 1997 y dos periodos 1991-1998 y 1999-2008 y permiten establecer que al menos tres factores pueden explicar el 80% de la varianza de los retornos

---

<sup>17</sup> Diferencia entre la *yield* de los bonos corporativos con mayor riesgo y aquellos con menor riesgo. BONTAS y ODAGESCU (2011), pp. 98

<sup>18</sup> Diferencia entre los rendimientos de los fondos de acciones y los rendimientos de los instrumentos del mercado de dinero. BONTAS y ODAGESCU (2011), pp. 98

<sup>19</sup> BONTAS y ODAGESCU (2011), pp. 98

<sup>20</sup> BONTAS y ODAGESCU (2011), pp. 108

esperados en el mercado de Irán. Adicionalmente se menciona cómo las sanciones norteamericanas han causado daños económicos y financieros, introduciendo mayor volatilidad a las variables macroeconómicas de Irán y dificultando la medición del riesgo en las inversiones.

Algunos trabajos no han encontrado evidencia empírica del modelo APT en el sentido estricto de la palabra, es decir, sólo teniendo en cuenta variables macroeconómicas para testear el modelo. Martínez y Rubio (1989) testearon el mercado español y encontraron que no había una relación estadísticamente significativa entre los retornos del mercado y variables macroeconómicas. Poon y Taylor (1991) utilizan el modelo en el Reino Unido y tampoco encontraron evidencia empírica significativa que les permitiera hacer predicciones con base en variables macroeconómicas. Los autores analizaron variables como la producción industrial, sorpresa de inflación, prima de riesgo, entre otros.

Ch'ng Huck y G.S. Gupta (2001), aplican el modelo en Malasia encontrando como única variable macroeconómica explicativa la inflación esperada. El estudio se basó en datos mensuales de 213 acciones entre septiembre de 1988 y junio de 1997. Los autores utilizaron análisis factorial para el trabajo y la técnica de factores macroeconómicos; fue bajo la segunda técnica con la que los autores encontraron que la inflación esperada era una variable explicativa.

Rjoub, Tursoy y Günsel (2009) realizaron pruebas del modelo en Turquía, en la bolsa de valores de Estambul; los autores usan datos mensuales entre junio de 2001 y septiembre de 2005 y tomaron como variables explicativas a priori las mismas que encontraron Chen, Roll y Ross en su estudio original en el mercado norteamericano, adicionando una variable: la tasa de desempleo. Las pruebas realizadas no encontraron un nivel de significancia representativo de las variables. Lo que implica que hay otras variables macroeconómicas diferentes que afectan el comportamiento del mercado accionario de ese país.

### **III. Metodología**

En esta sección se presenta la metodología estadística y econométrica utilizada para la realización de este trabajo. En primer lugar se formaliza el modelo APT original introducido por Ross (1976); el modelo de arbitraje fue introducido como una alternativa al modelo CAPM (Sharpe et al) que se ha convertido en la principal herramienta de análisis para explicar los

fenómenos que ocurren en los mercados de capitales para activos riesgosos<sup>21</sup>; posteriormente se describen las metodologías de componentes principales y análisis factorial, sus objetivos y utilidad de su aplicación y la construcción de las componentes/factores; luego se formaliza un modelo APT alternativo a partir de las componentes

### 3.1. El modelo APT original

Bajo la filosofía del modelo APT, Ross (1976) propone que el rendimiento de un activo financiero, la variable dependiente, es una función lineal de una serie de factores macroeconómicos, las variables independientes. De esta manera se puede formular el modelo de la siguiente forma:

$$Y_i = R_f + \delta_1 X_{i1} + \delta_2 X_{i2} + \delta_3 X_{i3} + \dots + \delta_p X_{ip} \quad (1)$$

Donde:

$Y_i$  : Rendimiento del activo financiero que se pretende explicar.

$R_f$  : Tasa libre de riesgo

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$  : Variables macroeconómicas utilizadas como variables independientes para la explicación del rendimiento del activo financiero

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_p$  : Parámetros, recogen la sensibilidad del rendimiento del activo financiero respecto a las variables macroeconómicas.

La ecuación (1) puede ser re-expresada como::

$$\varepsilon_i = \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3 + \dots + \delta_n X_p \quad (2)$$

Donde  $\varepsilon_i = Y_i - R_f$ , es el exceso de rendimiento del activo financiero a analizar por sobre la tasa libre de riesgo.

Si bien el modelo original planteado por Ross (1976) corresponde a la ecuación (1), la estimación econométrica supone una serie de dificultades; de un lado, la teoría APT no especifica cuáles son las variables macroeconómicas que deben ser incluidas en el modelo y

---

<sup>21</sup> ROSS (1976)

de hecho en varios trabajos se utilizan también variables financieras<sup>22</sup>. De esta forma, el universo de posibles variables que podrían ser incluidas dentro del modelo es bastante amplio y por tanto es muy posible que se presente una alta correlación entre varias de ellas, así como que exista una relación de dependencia de unas con otras, razón por la cual es de esperar que se presente colinealidad, además de otros fenómenos asociados con el tratamiento de variables que son series de tiempo.

Una alternativa que se pueden emplear para tratar de minimizar los problemas anteriormente descritos son procedimientos estadísticos que permiten recoger la información con un número menor de variables incorrelacionadas, entre los cuales se tienen los métodos de componentes principales y el análisis factorial y a partir de estos resultados estimar un modelo APT para el mercado accionario colombiano.

### **3.2. Análisis de Componentes Principales**

El método de componentes principales es de reducción, que tiene como objetivo la transformación de un conjunto de variables, denominadas variables originales (en este caso se seleccionaron 23 variables macroeconómicas y financieras, cuyo tratamiento se abordará posteriormente), en un nuevo conjunto de variables denominadas componentes principales; la característica fundamental de dichos componentes es que se encuentran incorrelacionados entre sí<sup>23</sup>, es decir, las componentes principales obtenidas son ortogonales. La utilización del análisis de componentes principales es justificable en estudios en los cuales se parte de un conjunto de variables muy amplio y existe una correlación alta entre varias de las variables incluidas; este es el caso de las variables macroeconómicas y financieras incluidas en el presente trabajo<sup>24</sup>.

La utilidad de esta técnica radica en la incorrelación de las componentes resultantes, y además dichas componentes pueden ordenarse de acuerdo con la información que llevan incorporada. Como medida de la información incorporada en una componente se utiliza su varianza<sup>25</sup>. El objetivo de esta metodología es, entonces, recoger la mayor proporción de la variabilidad del conjunto de variables originales en las componentes principales.

---

<sup>22</sup> Trabajos como los de McElroy y Burmeister (1988) y Londoño, Lopera y Restrepo (2010) proponen modelos APT, en los cuales, además de incluir variables macroeconómicas, incluyen variables financieras para la explicación del rendimiento de activos financieros.

<sup>23</sup> URIEL y ALDÁS (2005)

<sup>24</sup> La matriz de correlación de las variables utilizadas como explicativas del exceso de rendimiento del IGBC se puede encontrar en el anexo 2.

<sup>25</sup> URIEL y ALDÁS (2005), p.366

Cada componente es una combinación lineal del conjunto de variables originales, para la componente de la siguiente forma:

$$Z_k = u_{1i}X_{1i} + u_{2i}X_{2i} + u_{3i}X_{3i} + \dots + u_{pi}X_{pi} \quad (3)$$

Donde:

$Z_k$  : Componente principal k,

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$  : Variables originales.

$u_1, u_2, \dots, u_p$  : Parámetros recogen la importancia de cada una de las variables originales dentro de la componente principal, siendo  $k \leq p$ .

Para la obtención de la primera componente resuelve un problema optimización en el cual se procede a la maximización de la varianza; este proceso se realiza de manera similar para las componentes principales siguientes. A partir de Arrieta, Torres y Velásquez (2009) se formaliza el problema de optimización de la siguiente manera:

La ecuación (3) puede ser expresada de forma matricial, para la primera componente:

$$Z_1 = XU_1, \quad X_{n \times p}, \quad U_{p \times 1}$$

La varianza de la primera componente se expresa como<sup>26</sup>:

$$V(Z_1) = E(Z_1 - E(Z_1))^2 = E(Z_1^2) = E(Z_1' Z_1) = E[(XU_1)' XU_1] = E(U_1' X' X U)$$

Por el principio de analogía:

$$\widehat{V(Z_1)} = \frac{1}{n} (U_1' X' X U_1) = U_1' \frac{X' X}{n} U_1 = U_1' V U_1, \quad V = \frac{X' X}{n}$$

El problema de optimización a resolver en cada componente principal es

$$\max_{U_1} \widehat{V(Z_1)} \text{ s. a } U_1' U_1 = 1$$

Sea  $\lambda$  el multiplicador de lagrange y consideremos:

$$L = U_1' V U_1 - \lambda (U_1' U_1 - 1)$$

<sup>26</sup> La formalización del problema de optimización fue adaptada de ARRIETA, TORRES y VELÁSQUEZ (2009), pp. 7 – 8.



$$\frac{\partial(L)}{\partial U_1} = 2 V U_1 - 2 \lambda U_1 \quad . \text{ Derivada de una forma cuadrática}$$

Utilizando las condiciones de primer orden para la optimización:

$$2 V U_1 - 2 \lambda U_1 = 0 \Leftrightarrow V U_1 - \lambda U_1 = 0 \Leftrightarrow (V - \lambda I) U_1 = 0.$$

“Si descartamos la solución trivial  $U_1 = 0$  se requiere que  $\det(V - \lambda I) = 0$  , el cual es un problema de encontrar las raíces características y de estas se toma como solución del problema aquella que corresponda al mayor valor propio, de acuerdo con el objetivo planteado en el problema de optimización”<sup>27</sup>. De manera análoga se realiza el proceso para las siguientes componentes. La segunda componente explicará una menor proporción de la varianza que la primera componente. Las demás componentes cumplirán con la misma condición.

Al utilizar la técnica de componentes principales se obtienen tantas componentes como variables originales, sin embargo no todas las componentes se retienen. La retención de las componentes es una parte crucial de la técnica, ya que el objetivo de esta metodología es la reducción de un amplio conjunto de variables originales, en un grupo más pequeño de componentes principales. Siguiendo esta premisa, se retendrán las componentes principales que mejor expliquen la varianza del conjunto de variables originales.

Si bien el número de componentes principales obtenidas al aplicar dicha técnica es igual al número de variables originales, sólo unas cuantas son retenidas, interpretadas y, a la postre, utilizadas en posteriores análisis. Las componentes principales que son retenidas y utilizadas son aquellas que, de un lado, den cuenta de la máxima varianza del conjunto de variables originales, y de otro, estén incorrelacionadas con las demás componentes. Existen varios métodos para decidir qué número de variables deben ser retenidas. En los paquetes estadísticos y econométricos disponibles se puede identificar el valor propio (*eigenvalue*) de cada componente, valor que servirá como criterio de decisión para determinar cuántas componentes deben ser retenidas. Un valor propio igual o mayor a 1 significa que al menos una variable del conjunto de variables originales contribuye a explicar la varianza de dicha componente principal, por lo tanto se deben retener aquellas componentes cuyo valor propio sea mayor a uno. Este criterio fue propuesto por Kaiser (1960), e implica que cada factor debe por lo menos extraer el equivalente a una de las variables originales.

---

<sup>27</sup> ARRIETA, TORRES y VELÁSQUEZ (2009), pp. 8

Con base en el mismo criterio se puede construir el gráfico de segmentación, que permite identificar el número de componentes que tienen un valor propio mayor a 1<sup>28</sup>.

De acuerdo al gráfico de segmentación, de las 23 componentes principales resultantes, correspondientes a 23 variables originales (representadas en el eje X), solo las 6 primeras componentes arrojan un valor propio (representado en el eje Y) superior a 1, por lo tanto son esas componentes las que deben ser retenidas.

Asimismo, es necesario determinar el coeficiente *Rho* de las componentes seleccionadas. Dicho coeficiente *rho* representa el porcentaje de la varianza total del conjunto de variables originales, explicado por las componentes seleccionadas. Mientras mayor sea el *rho*, las componentes seleccionadas explican en mayor medida la varianza de las variables originales.

### 3.3. Análisis Factorial<sup>29</sup>

La metodología del análisis factorial, al igual que el de componentes principales, busca examinar la interdependencia de un conjunto de variables originales; sin embargo, a diferencia del análisis de componentes principales que busca explicar la mayor parte de la varianza del conjunto de datos, en el análisis factorial, “los factores son seleccionados para explicar las interrelaciones entre variables”<sup>30</sup>. De esta manera, al usar la metodología del análisis factorial se intenta determinar qué proporción de la varianza de cada variable es compartida con otras de las variables del conjunto original de variables<sup>31</sup>.

A través del análisis factorial, se puede definir un modelo como el que se presenta a continuación<sup>32</sup>:

$$X_1 = l_{11}F_1 + l_{12}F_2 + \dots + l_{1m}F_m + e_1$$

$$X_2 = l_{21}F_1 + l_{22}F_2 + \dots + l_{2m}F_m + e_2$$

... ..

$$X_p = l_{p1}F_1 + l_{p2}F_2 + \dots + l_{pm}F_m + e_p$$

<sup>28</sup> En el anexo 7 se pueden apreciar los gráficos de segmentación utilizados en el presente trabajo.

<sup>29</sup> El análisis factorial puede ser exploratorio o confirmatorio. En este trabajo se utilizó el enfoque exploratorio, pues el objetivo era identificar y retener los factores a partir del conjunto de variables originales.

<sup>30</sup> URIEL y ALDÁS (2005), pp. 408.

<sup>31</sup> TABACHNICK y FIDELL (2000)

<sup>32</sup> URIEL y ALDÁS (2005), pp. 409.

Donde  $F_1, F_2, \dots, F_m$  son los factores comunes,  $e_1, e_2, \dots, e_p$  son los factores específicos y los coeficientes  $l_{jh}$  son las cargas factoriales, es decir el peso de cada factor en cada variable. De esta manera cada variable del conjunto de variables originales está explicada por un conjunto de factores comunes y por un factor que es único para cada variable.

A partir del modelo propuesto por el análisis factorial, se infieren una serie de hipótesis tanto sobre los factores comunes como de los específicos. De los factores comunes se formula la hipótesis de que la esperanza matemática de cada uno de los factores es nula (es decir  $E(f) = 0$ ), y además que su matriz de covarianza es la matriz identidad ( $(E(ff')) = I$ ). Para los factores específicos las hipótesis son:  $E(e) = 0$  y  $E(ee') = \Omega$ , donde  $\Omega$  es una matriz diagonal<sup>33</sup>.

El criterio de retención de los factores es idéntico al utilizado cuando se realiza un análisis de componentes principales. En general se retienen aquellos factores cuyo valor propio es superior a 1. También se puede construir el gráfico de sedimentación, como una herramienta de decisión a la hora de retener los componentes. De forma similar al método de los componentes, los factores retenidos explicarán cierto porcentaje de la varianza de las variables originales.

### 3.4. El modelo APT: Construcción con componentes y factores

La metodología de componentes principales permite realizar una transformación del modelo APT original planteado por Ross (1976). En lugar de tener un modelo lineal en el cual el exceso de rendimiento de un activo financiero está en función de una serie de variables macroeconómicas y financieras, se puede plantear un modelo lineal en el cual el exceso de rendimiento de un activo financiero está en función de una serie de componentes principales producto de las variables originales.

A partir de la metodología de componentes principales, es posible plantear un modelo de la siguiente forma:

$$\varepsilon_i = \vartheta_1 Z_1 + \vartheta_2 Z_2 + \vartheta_3 Z_3 + \dots + \vartheta_k Z_k \quad (4)$$

Donde  $\varepsilon_i$  es el exceso de rendimiento del activo financiero por sobre la tasa libre de riesgo,  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_k$  es el conjunto de componentes principales obtenidas a partir de las variables

---

<sup>33</sup> Siguiendo la notación utilizada por URIEL y ALDÁS (2005), pp. 411.

originales, y  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots, \vartheta_n$  son los parámetros del modelo, y representan la sensibilidad del exceso de rendimiento del activo financiero respecto a cada componente<sup>34</sup>.

Por su parte un modelo APT construido a partir de los factores resultantes luego del análisis factorial tendría la forma:

$$\varepsilon_i = \vartheta_1 F_1 + \vartheta_2 F_2 + \vartheta_3 F_3 + \dots + \vartheta_m F_m \quad (5)$$

Donde  $\varepsilon_i$  es el exceso de rendimiento del activo financiero por sobre la tasa libre de riesgo,  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_m$  es el conjunto de factores obtenidos a partir de las variables originales, y  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots, \vartheta_m$  son los parámetros del modelo, y representan la sensibilidad del exceso de rendimiento del activo financiero respecto a cada factor.

### 3.5. Tratamiento de los datos

Para la estimación del modelo fueron seleccionadas variables tanto financieras como macroeconómicas que se consideraron relevantes y justificables desde la teoría económica. Roll y Ross (1980) apoyan a la idea de que los rendimientos de las acciones están relacionados con una serie de factores macroeconómicos y financieros, como posibles fuentes de riesgo en vez de uno solo. El análisis de este trabajo resulta de 23 variables independientes y una variable dependiente (el exceso de rendimiento entre el índice IGBC y un título TES con vencimiento a 10 años). Las variables y una descripción de cada una se pueden encontrar en la tabla 1. En general, estas variables son, a priori, las más relevantes para tener en cuenta en cuanto a la actividad económica, financiera, mercados de capital y percepción de riesgo, factores que explicarían el exceso de rendimiento del índice accionario local. El periodo de análisis comprende desde el 19/03/2005 hasta 17/04/2012, para un total de 2587 observaciones. Los datos mensuales fueron llevados a términos diarios para estandarizar la serie, práctica que no afecta los resultados ya que los agentes del mercado toman las decisiones diariamente con los datos más recientes disponibles. Todas las variables se calcularon como variaciones anuales porcentuales.

En la tabla 1 presenta un resumen de las variables independientes seleccionadas ( $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ) para este trabajo.

---

<sup>34</sup> En el modelo lineal a partir de variables, los parámetros del modelo podían ser interpretados como elasticidades; al trabajar con componentes principales o con factores los parámetros obtenidos no pueden ser interpretados como elasticidades

**Tabla 1. Resumen Variables macroeconómicas y financieras seleccionadas**<sup>35</sup>

Variable	Periodicidad	Variable	Periodicidad
VentaVehículos	Mensual	CDS10Y	Diaria (Spot)
Prod. Industrial	Mensual	CDS5Y	Diaria (Spot)
Ventas Minoristas	Mensual	EMBI	Diaria (Spot)
Tasa Desempleo	Mensual	COP	Diaria (Spot)
Licencias Const	Mensual	VIX	Diaria (Spot)
Inflación Anual	Mensual	WTI	Diaria (Spot)
Inflación Mensual	Mensual	MSCIEM	Diaria (Spot)
Exp. Inflación	Mensual	SP500	Diaria (Spot)
Sorpresa Inflación	Mensual	ORO	Diaria (Spot)
M1	Mensual		
Exportaciones	Mensual		
Importaciones	Mensual		
IED	Mensual		
DTF	Semanal		

**Fuentes:** Bloomberg, DANE, Banrep, Bolsa y Renta.

**Número de Observaciones:** 2587

**Periodo analizado:** 19/03/2005 - 17/04/2012

A continuación se presenta una descripción de la variable independiente ( $\varepsilon_t$ ), la diferencia en rendimiento entre el IGBC y los TES a 10 años. El IGBC fue seleccionado por ser el índice más antiguo de Colombia, y es sobre el que más historia se tiene; el índice Colcap si bien es más usado en la actualidad por el mercado, fue creado en 2009, por lo que la historia anual es reducida y el estudio habría carecido de datos y eventos importantes. Para hallar el exceso de rendimiento se tomó como activo libre de riesgo un título TES con vencimiento a 10 años, para esto se construyó un título sintético que capturara los rendimientos diarios para el periodo analizado<sup>36</sup>.

Si bien, en teoría, el modelo APT exige que el activo del que se quiere explicar su rendimiento sea un activo individual (una acción por ejemplo) o un portafolio eficientemente diversificado<sup>37</sup>, en la práctica, los trabajos empíricos como este acuden a índices del mercado accionario, como

<sup>35</sup> Una descripción detallada de las variables utilizadas en este trabajo se puede encontrar en el anexo 1. Se construyó una serie de datos diaria; la periodicidad mensual de algunas de las variables se refiere únicamente a la frecuencia de su publicación.

<sup>36</sup> Los rendimientos entendidos como la *yield* al vencimiento de este TES sintético. Se construyó una curva de rendimientos diaria con la información de los títulos de deuda pública (TES) tasa fija con todos los vencimientos para el periodo analizado. Luego, se calcula una ecuación de orden 2 que se ajuste a la nube de puntos, donde el eje "x" representa el plazo o duración de los títulos y el eje "y" la TIR de negociación o rendimiento. En la ecuación resultante se reemplaza la x por el número de años, en este caso 10 años, para encontrar el valor justo o rendimiento justo del título a la fecha.

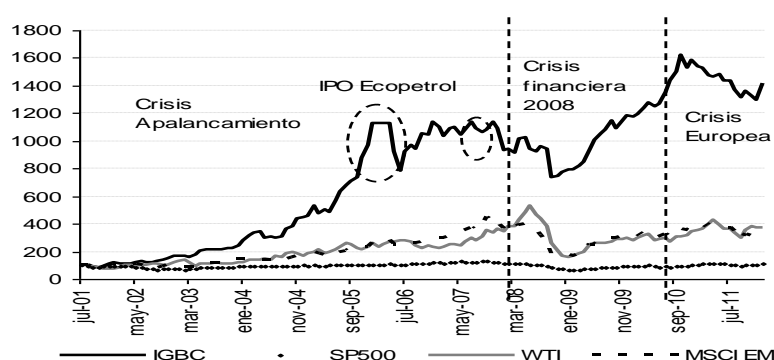
<sup>37</sup> Que maximice el rendimiento y minimice el riesgo.

el IGBC. Como bien anotan Londoño, Lopera y Restrepo (2010), si bien los índices accionarios no son eficientes, sí reúnen ciertas características que los hacen una buena fuente de información para trabajos empíricos. Los índices accionarios están conformados por acciones que, en general, poseen una alta liquidez y capitalización bursátil; asimismo son una muy buena representación del universo de posibilidades de inversión que los agentes pueden encontrar en el mercado; y por último son una referencia para evaluar el comportamiento de portafolios accionarios.

El IGBC ha sido por mucho, el activo financiero que mayor rentabilidad ha generado en los últimos 9 años, US\$100 invertidos en el índice desde el principio del análisis serían equivalentes hoy a US\$1.400, mientras que invertidos en una canasta de activos emergentes o en petróleo sólo equivaldrían a US\$400 aproximadamente; por su parte el S&P 500 sólo registró una valorización del 8% en todo el periodo analizado.

En el periodo analizado, vale la pena resaltar cuatro momentos históricos que se podrían catalogar como atípicos, y son de especial relevancia, ya que las implicaciones de estos periodos podrían afectar el análisis de este trabajo. En la siguiente gráfica se aprecia el comportamiento del IGBC durante los últimos años y se destacan los cuatro momentos atípicos, que se describen posteriormente.

**Gráfico 1. Comportamiento reciente del IGBC, WTI, MSCI EM y S&P 500**



**Fuente:** Construcción propia con base en datos extraídos de Bloomberg.

Los efectos que los eventos atípicos anteriormente mencionados pudieran tener sobre el exceso de rendimiento del IGBC se controlarán con la introducción de variables *dummy*. Las variables *dummy* a incluir en el modelo son:

Tabla 2. Variables *dummy*

Variable <i>Dummy</i>	Interpretación / Periodo
D1	Crisis de apalancamiento en el mercado accionario colombiano. Junio – Julio 2006
D2	IPO de Ecopetrol. Último trimestre de 2007
D3	Crisis financiera en Estados Unidos. Último trimestre de 2008
D4	Crisis de la deuda europea. Noviembre de 2010 a Junio 2011

Fuente: Construcción propia

#### IV. Estimación

La estimación del modelo APT para el mercado accionario colombiano se compone de tres procesos. De un lado, a partir del conjunto de variables originales, se realizará un análisis de componentes principales, como método de reducción. Luego se realizará un análisis factorial al mismo conjunto de variables<sup>38</sup>. Una vez obtenidas y caracterizadas las componentes principales y los factores, se usarán para estimar el modelo APT, cuya variable dependiente será el exceso de rendimiento del IGBC por sobre el genérico de los TES a 10 años ( $\varepsilon_i$ ) y las variables independientes serán las componentes principales ( $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_k$ ), y los factores ( $F_1, F_2, F_3, \dots, F_m$ ) respectivamente, para llegar a un modelo como el descrito en las ecuaciones (4) y (5). Adicionalmente se incluirán las variables *dummy* anteriormente descritas para controlar los eventos atípicos que se presentaron durante el periodo de análisis.

##### 4.1. Estimación de los componentes principales

En este trabajo se utilizó una base de datos con 23 variables macroeconómicas y financieras, las cuales fueron descritas previamente. Se realizó el análisis de componentes principales a dicha base de datos, utilizando los programas econométricos EVIEWS 6 y STATA 12. A continuación se presentan los resultados obtenidos.

Luego de realizar el análisis de componentes principales a las 23 variables originales disponibles, se identificaron 6 componentes con un valor propio (*eigenvalue*) mayor a 1, resultados que se presentan en la siguiente tabla:

<sup>38</sup> En los anexos 5 y 6 es posible apreciar el resultado completo de los análisis de componentes principales y factorial

**Tabla 3. Componentes principales con valor propio mayor a 1.**

Component	Eigenvalue	Difference	Proportion	Cumulative
Comp1	9,0312	5,3669	0,3927	0,3927
Comp2	3,6643	1,2600	0,1593	0,5520
Comp3	2,4043	0,5046	0,1045	0,6565
Comp4	1,8997	0,6845	0,0826	0,7391
Comp5	1,2152	0,1227	0,0528	0,7919
Comp6	1,0925	0,2679	0,0475	0,8394

**Fuente:** Construcción propia a través del programa STATA 12 a partir de datos de Bloomberg, DANE, Banrep, Bolsa y Renta.

Es importante resaltar que el *rho* que arrojan las 6 componentes principales retenidas es de 0,8394, lo que implica que dichas componentes explican el 83,94% de la varianza de las 23 variables originales. Luego de realizar la rotación de los vectores de las componentes principales<sup>39</sup>, en la siguiente tabla se puede observar la contribución de cada componente a la explicación de la varianza total de las variables originales:

**Tabla 4. Componentes principales luego de la rotación, contribución a la explicación de la varianza**

Component	Variance	Difference	Proportion	Cumulative
Comp1	5,4768	0,9933	0,2381	0,2381
Comp2	4,4836	1,1925	0,1949	0,4331
Comp3	3,2911	0,6278	0,1431	0,5762
Comp4	2,6633	0,4797	0,1158	0,6919
Comp5	2,1836	0,9748	0,0949	0,7869
Comp6	1,2088		0,0526	0,8394

**Fuente:** Construcción propia a través del programa STATA 12 a partir de datos de Bloomberg, DANE, Banrep, Bolsa y Renta.

Es evidente como la primera componente contribuye a la explicación de un 23,81% de la varianza del conjunto de variables originales. La segunda componente contribuye a la explicación de un 19,49%, mientras que la tercera lo hace en un 14,31%. La misma interpretación puede hacerse para las componentes 4, 5 y 6.

Como se explicó con anterioridad, cada componente es una combinación lineal del conjunto de variables originales, tal y como se muestra en la ecuación (3). La tabla 5 muestra la combinación lineal resultante para cada componente principal.

<sup>39</sup> La rotación de las variables utilizada en el análisis de componentes principales se realiza para maximizar la suma de las varianzas de las cargas al cuadrado. Esto facilita la interpretación de los resultados ya que la finalidad es que se pueda asociar una variable con sólo uno de los factores.



Una vez obtenida la combinación lineal que representa cada componente principal, es fácil calcular los vectores de cada componente. Como se ha dicho con anterioridad, cada componente es una combinación lineal de las 23 variables originales; sin embargo los coeficientes de cada variable dentro de la combinación lineal, son útiles para caracterizar cada componente.

Dicha categorización se realiza con fines explicativos y como una forma de identificar con mayor facilidad las conclusiones de análisis posteriores utilizando las componentes principales. Es importante también decir que la categorización de las componentes nace fruto de la experiencia y el conocimiento del mercado y las variables utilizadas para la explicación del exceso de rendimiento del IGBC, por lo que se puede argumentar que hay un importante componente subjetivo, apoyado en los resultados estadísticos del análisis de componentes principales.

**Tabla 5. Componentes principales luego de la rotación. Combinación lineal**

Variable	Comp1	Comp2	Comp3	Comp4	Comp5	Comp6	Unexplained
VentaVehículos	-0,0767	0,3860	-0,0046	-0,0595	-0,0098	0,0742	0,0872
Prod. Industrial	-0,1081	0,3654	0,0213	0,0975	-0,0095	-0,1051	0,2403
Ventas Minoristas	-0,0473	0,4087	-0,0282	-0,0583	-0,0152	-0,0121	0,1447
Tasa Desempleo	-0,1224	0,0034	-0,1998	-0,0802	0,5198	-0,0976	0,2469
Licencias Const	0,0288	0,3523	0,0280	-0,1376	-0,0180	-0,0659	0,3315
Inflación Anual	0,0082	-0,0061	-0,0546	0,5687	0,0167	0,0875	0,0648
Inflación Mensual	0,0820	0,0703	0,1271	0,1399	0,5425	-0,1523	0,0797
Exp. Inflación	0,0137	-0,0442	0,0370	-0,0289	0,6513	0,1654	0,0787
Sorpesa Inflación	0,1187	0,1808	0,1616	0,2762	-0,0084	-0,4900	0,2824
M1	0,0125	0,4260	-0,2416	-0,0322	0,0371	0,1149	0,3238
CDS10Y	0,4502	0,0061	0,0371	-0,0562	0,0076	-0,0183	0,0516
CDS5Y	0,4220	-0,0400	0,0533	-0,0202	-0,0005	-0,0633	0,0535
EMBI	0,3863	-0,0082	-0,0172	0,0540	0,0060	-0,0338	0,0454
Exportaciones	0,1376	0,1181	0,4528	-0,0127	0,0425	0,1267	0,1729
Importaciones	0,1294	0,3700	0,1887	0,0746	-0,0123	0,0857	0,1506
IED	0,0200	0,0567	0,0636	0,1004	0,0125	0,7814	0,1756
DTF	-0,0198	-0,0458	0,0347	0,5842	0,0018	0,0469	0,1020
COP	0,2672	0,1026	-0,3778	-0,1697	0,0369	0,0681	0,1704
VIX	0,3258	0,0975	-0,0016	0,1505	-0,0596	0,0727	0,2319
WTI	-0,0687	-0,0695	0,5101	-0,0171	0,0187	0,0452	0,1272
MSCIEM	-0,3594	0,1165	0,0779	0,0781	-0,0077	0,0008	0,0507
SP500	-0,2302	0,0864	0,2141	-0,1005	-0,0140	-0,0645	0,0577
ORO	0,1109	-0,0373	0,3844	-0,3247	0,0320	0,0122	0,4233

**Fuente:** Construcción propia a través del programa STATA 12 a partir de datos de Bloomberg, DANE, Banrep, Bolsa y Renta.

## 4.2. Estimación de los factores

De manera similar a la estimación de los componentes principales, se utilizó el programa STATA para realizar el análisis factorial al conjunto de las 23 variables originales, y extraer los factores comunes y específicos. En las siguientes tablas se pueden apreciar los factores retenidos luego del análisis.

**Tabla 6. Factores con valor propio mayor a 1.**

Factor	Eigenvalue	Difference	Proportion	Cumulative
Factor1	8,9331	5,3906	0,4563	0,4563
Factor2	3,5426	1,2640	0,1809	0,6372
Factor3	2,2785	0,5851	0,1164	0,7536
Factor4	1,6934	0,5674	0,0865	0,8401
Factor5	1,1260		0,0575	0,8976

**Fuente:** Construcción propia a través del programa STATA 12 a partir de datos de Bloomberg, DANE, Banrep, Bolsa y Renta.

**Tabla 7. Factores luego de la rotación, contribución a la explicación de la varianza**

Factor	Variance	Difference	Proportion	Cumulative
Factor1	5,9876	1,7008	0,3058	0,3058
Factor2	4,2868	1,5075	0,2190	0,5248
Factor3	2,7793	0,4032	0,1420	0,6667
Factor4	2,3761	0,2322	0,1214	0,7881
Factor5	2,1439		0,1095	0,8976

**Fuente:** Construcción propia a través del programa STATA 12 a partir de datos de Bloomberg, DANE, Banrep, Bolsa y Renta.

Los resultados obtenidos luego de realizar el análisis factorial dan cuenta de resultados muy similares a los obtenidos en el análisis de componentes principales. Se retuvo un número similar de componentes y de factores, seis componentes y cinco factores.

También de manera similar al caso de los componentes principales, es posible construir una tabla que muestre la construcción de los factores, la cual se presenta a continuación.

**Tabla 8. Factores luego de la rotación.**

Variable	Factor1	Factor2	Factor3	Factor4	Factor5	Uniqueness
VV	-0,4075	0,8366	0,1417	-0,1834	-0,0174	0,0801
PI	-0,4049	0,7106	0,1979	0,0466	0,0358	0,2884
VM	-0,3637	0,8168	0,1132	-0,1464	-0,0185	0,166
TD	-0,2662	-0,0925	-0,2642	-0,1036	0,5879	0,4944
LC	-0,2517	0,6722	0,1845	-0,2031	-0,0256	0,4089
IA	0,421	-0,1176	-0,1219	0,8339	0,1153	0,0854
IM	0,1065	0,0806	0,2036	0,2977	0,8921	0,0562
EIM	0,0052	-0,0311	-0,0112	-0,0253	0,967	0,0631
SI	0,1718	0,1796	0,3582	0,5366	0,1333	0,5042
M1	-0,1225	0,6978	-0,2089	-0,0793	0,01	0,448
CDS10Y	0,9681	-0,1067	-0,0151	0,131	0,0232	0,0335
CDS5Y	0,9381	-0,2066	0,0054	0,181	0,0227	0,044
EMBI	0,9139	-0,1707	-0,1061	0,2724	0,0343	0,0489
EXP	0,0358	0,4659	0,734	0,0284	0,101	0,232
IMP	0,0567	0,8023	0,4105	0,1111	0,0305	0,1713
IED	0,1424	0,3388	0,0511	0,0592	-0,0374	0,8574
DTF	0,342	-0,1599	0,0248	0,8572	0,1053	0,1109
COP	0,5844	-0,0311	-0,6463	-0,0914	-0,0274	0,2307
VIX	0,769	0,085	-0,0505	0,3648	-0,052	0,2631
WTI	-0,3555	0,1661	0,8272	-0,043	0,0642	0,1557
MSCI	-0,8599	0,3768	0,2454	-0,0773	0,0063	0,0524
SP500	-0,7326	0,3539	0,4558	-0,2748	-0,0067	0,0547
ORO	-0,1691	0,1628	0,5296	-0,2957	0,0019	0,577

**Fuente:** Construcción propia a través del programa STATA 12 a partir de datos de Bloomberg, DANE, Banrep, Bolsa y Renta.

#### 4.3. Categorización de las componentes principales y factores

El análisis de componentes principales arrojó 6 componentes que explican en un porcentaje importante la varianza del conjunto de variables originales inicialmente seleccionadas. Para los propósitos de este trabajo hemos definido como variables relevantes, aquellas que tengan un parámetro superior a 0,20 en valor absoluto dentro de cada componente; sólo esas variables son tenidas en cuenta para la clasificación de cada componente del análisis, teniendo en cuenta que cada componente es una combinación lineal de las 23 variables originales.

Asimismo, el análisis factorial arrojó 5 factores. En este caso las variables que comparten la varianza explicada por cada factor son, en su mayoría, las mismas que hacen parte de cada

uno de los primeros 5 componentes<sup>40</sup>. Por eso es posible caracterizar de la misma forma los componentes principales y los factores

### **Componente 1 / Factor 1: Percepción de Riesgo (PRI)**

Se puede inferir claramente un componente/factor de percepción de riesgo. Las variables de mayor relevancia, son el EMBI, los CDS 5Y y los CDS 10, el VIX, el MSCI EM y el S&P 500. Se podría esperar que estas variables estén correlacionadas negativamente con el rendimiento del mercado accionario, ya que a medida que aumenta la percepción de riesgo en el mercado, los seguros contra pérdidas como los CDS y el VIX aumentan de valor, mientras el valor de las acciones como tal disminuye, en un proceso donde en la mayoría de los casos, los inversionistas retiran su dinero de activos riesgosos e invierten en activos libres de riesgo. Para el caso del MSCI EM y el SP500 un aumento en la percepción de riesgo conlleva casi con seguridad una disminución en sus rendimientos.

### **Componente 2 / Factor 2: Actividad Económica Nacional (AEN)**

Las variables con mayor relevancia y que cumplen con la caracterización mencionada son la venta de vehículos, la producción industrial, las ventas minoristas, las licencias de construcción, las importaciones y el M1. Se puede argumentar con facilidad que estas variables están relacionadas con la actividad económica interna de un país. Variaciones positivas se pueden interpretar como fortaleza de la economía y viceversa. Este componente/factor debería estar, a priori, correlacionada positivamente con el exceso de rendimiento del mercado accionario.

### **Componente 3 / Factor 3: Comercio Exterior (CEX)**

El tercer componente/factor se puede caracterizar como uno que hace referencia al comercio exterior de Colombia, ya que muestra mayor correlación lineal positiva con el WTI, las exportaciones y el oro denotando la relevancia de las exportaciones tradicionales en *commodities* como petróleo y minerales. También se encuentra una relación con el tipo de cambio peso dólar (COP), aunque en este caso negativa. Adicionalmente las importaciones se encuentran como la quinta variable en importancia dentro del componente.

---

<sup>40</sup> La única diferencia obtenida entre el análisis de componentes principales y el análisis factorial se observa en el último componente, caracterizado como Inversión Extranjera Directa, que no aparece como un sexto factor.

#### **Componente 4 / Factor 4: Intereses Reales (IRE)**

El cuarto componente/factor, llamado Intereses Reales, hace referencia principalmente a variables que tienen correlación positiva como la DTF, la inflación y las sorpresas por inflación, por lo que se puede asimilar como un componente que hace referencia a los Intereses Reales. El poder adquisitivo del inversionista se mida a través del interés real, debido a que se deben generar retornos superiores a la inflación. Las sorpresas en la inflación donde la inflación efectiva es superior a la inflación esperada van en contra de los intereses del inversionista y estarían promoviendo el consumo más que el ahorro en los agentes.

#### **Componente 5 / Factor 5: Curva de Phillips (CPH)**

Se tiene un quinto componente/factor que permite hacer referencia a la curva de Phillips que relaciona la inflación, las expectativas de inflación y el desempleo, asumiendo que es necesario tener un nivel de de inflación con el fin de minimizar el desempleo, esta relación empírica es aceptada generalmente con excepción de épocas de estanflación dónde se ha demostrado que pueden convivir alto nivel de inflación y alto desempleo. Dentro de la formulación, la inflación está en función de la inflación esperada. Para el caso de Colombia se han realizado diversos estudios que permiten concluir sobre la no linealidad de la curva de Phillips aplicada para el caso colombiano y en algunos de ellos se ha concluido sobre la pendiente positiva de la curva, tomando como base la escuela Austríaca que sustenta la idea de aumentos de la inflación y de las tasas de interés lleva a inversiones que fomentan el desempleo a diferencia de lo que se podría esperar desde la teoría inicial de la curva de Phillips.

#### **Componente 6: Inversión Extranjera Directa (IED)**

El sexto componente se destaca por tener como principal variable la Inversión Extranjera Directa (IED). Los tipos de IED como: Alianzas de empresas con riesgos compartidos, compra de empresas existentes, montaje de empresas y franquicias tienen un componente de más largo plazo y mayor compromiso que la inversión de portafolio, sin embargo las dinámicas competitivas causan que el mercado accionario refleje la entrada de nuevos jugadores y salida de empresas que por competencia deben salir del mercado dada la tecnología y eficiencia que también llega de con la IED. Para el caso colombiano es evidente que la percepción de mayores niveles de políticas de seguridad han atraído IED, especialmente a los sectores petroleros y de minería y canteras, donde algunas de estas empresas son públicas.

**Tabla 9. Componentes vs. Factores; Contribución a la explicación de la varianza**

Componentes Principales			Análisis Factorial		
Component	Proportion	Cumulative	Factor	Proportion	Cumulative
Comp1	0,3927	0,3927	Factor1	0,4563	0,4563
Comp2	0,1593	0,5520	Factor2	0,1809	0,6372
Comp3	0,1045	0,6565	Factor3	0,1164	0,7536
Comp4	0,0826	0,7391	Factor4	0,0865	0,8401
Comp5	0,0528	0,7919	Factor5	0,0575	0,8976
Comp6	0,0475	0,8394	Factor6	N/A	N/A

Fuente: Construcción propia a través del programa STATA 12 a partir de datos de Bloomberg, DANE, Banrep, Bolsa y Renta.

#### 4.4. Efectos esperados de los componentes principales sobre el exceso de rendimiento del IGBC

Desde la teoría económica y financiera se puede realizar un análisis a priori de los efectos esperados que tendrían los componentes principales encontrados sobre la variable dependiente, el exceso de rendimiento del IGBC sobre los títulos de tesorería TES.

A continuación se lanzan hipótesis sobre la relación de los componentes principales y el exceso de rendimientos del IGBC, tomando como referencia la teoría económica y las evidencias observadas en el mercado. También se hace un recuento de los trabajos anteriores que hayan utilizado variables similares a los componentes calculados para la estimación de modelos APT.

**PRI:** Como ya se ha mencionado, la percepción de riesgo debería tener un efecto considerable y negativo sobre el exceso de rendimiento del IGBC<sup>41</sup>. Varios autores han encontrado resultados similares, que ubican el riesgo como uno de los factores más relevantes, aunque las variables no son las mismas que se utilizan en este trabajo, si son variables que buscan capturar los mismos efectos. McElroy y Burmeister (1988) encontraron que el modelo APT tiene una mayor capacidad explicativa que el CAPM, al incluir en su modelo variables como la prima de *default*, la cual capturan índices como el VIX, los CDS y el EMBI. Londoño, Lopera y Restrepo (2010) en el estudio realizado para el mercado colombiano construyeron tres componentes principales a saber: El rendimiento de las letras del tesoro estadounidense, un componente que reúne los índices de las bolsas más importantes del mundo y un componente de las tasas de interés. El primero de estos componentes se encuentra directamente relacionado con la percepción del riesgo, ya que las letras del tesoro norteamericano representan el activo de cero riesgo por excelencia en el mundo actual. Bontas y Odagescu

<sup>41</sup> Entendiéndose la percepción de riesgo no como la desviación estándar del rendimiento esperado, si no como la aversión de los agentes a invertir en activos riesgosos y su preferencia por buscar activos refugio.

(2011) encontraron que el rendimiento del portafolio construido con 10 acciones de la bolsa de valores de Bucarest está “correlacionado sólo con la preferencia por el riesgo, la preferencia por el tiempo y la evolución del índice BET-C”<sup>42</sup>.

**AEN:** Es de esperarse que la actividad económica de un país, en este caso Colombia, tenga un importante efecto sobre el comportamiento de su mercado accionario, y que este efecto sea, a priori, positivo. Sin embargo, es necesario reconocer que los indicadores de actividad económica como los que se utilizan en este trabajo se publican con rezagos, mínimo de un mes. Y a su vez es ampliamente reconocido dentro de los mercados financieros que los rendimientos de las acciones pueden ser considerados como indicadores líderes para evaluar el desempeño económico esperado, por lo que en trabajos empíricos el signo de un componente similar al utilizado en este trabajo pudiera ser negativo. Dentro de los autores mencionados en el estado del arte donde se evidencia este componente, se destaca el estudio de Chen, Roll y Ross (1986), quienes probaron que una de las variables que afectan el retorno de mercado accionario es la producción industrial, en un estudio hecho en el mercado norteamericano. Chen (1991), encuentra una correlación negativa entre los retornos y el crecimiento económico reciente y una correlación positiva de los retornos con el crecimiento económicos futuro. Asume que mientras se puede pronosticar macroeconómicamente el desempeño de un país, es posible pronosticar los excesos de retornos que puede presentar el mercado accionario, mientras que Febrian y Herwany (2010), muestran que las variables que tienen mayor relación con el exceso de retornos son el índice de producción y el spread de las tasas de interés, además que los coeficientes de la regresión son significativos con signos positivo.

**CEX:** Se podría esperar que en la medida que las exportaciones tradicionales colombianas como petróleo y oro y en general todas las exportaciones del país tuvieran un coeficiente con signo positivo al ser explicativas del exceso de rendimiento sobre el IGBC, debido a dos factores: en la medida que un país tenga comportamientos positivos de sus exportaciones y balanza comercial fortalecerían una economía por diferentes vías como el mayor poder adquisitivo y el mayor ahorro o inversión ,y, de otro lado, el IGBC está compuesto por empresas de sectores petroleros y mineros, que representa un 55.620%<sup>43</sup>. La caracterización del comercio exterior como componente principal de este trabajo, se concentra en petróleo y minería. Con respecto a otros estudios realizados, se puede mencionar que el trabajo de Chen, Roll y Ross

---

<sup>42</sup> BONTAS y ODAGESCU (2011), pp. 108

<sup>43</sup> Canasta IGBC segundo trimestre 2012: PREC 27,206%; Ecopetrol 24,436%; PMGC 2,440%; CNEC 1,396%; Mineros 0,142%.

(1986) para EEUU no incluye el petróleo como una variable que explique el rendimiento de las acciones. Hamao (2002), incluye los precios del petróleo como su sexta y última variable en estudio de la aplicación del APT al mercado japonés. Más allá de los precios del petróleo no se ha encontrado evidencia que muestre variables o construcción de componente que tengan el comercio exterior como una fuente de análisis y de explicación de los rendimientos. La dinámica de comercio exterior debe estar inmersa en los múltiples ejercicios que utilizan y encuentran la producción de un país como relevante, no obstante bajo este estudio se hace el análisis por separado en dos componentes CEX y AEN.

**IRE:** Al realizar el ejercicio para el mismo periodo de análisis de la tasa de interés real construida con la DTF y la inflación y comparándola con el exceso de rendimiento del IGBC, se podría esperar una relación negativa entre las dos variables, económicamente esta relación puede tener sentido en la medida en que los inversionistas racionalmente y ante bajos niveles de intereses reales tienen una mayor propensión a tomar riesgos en el mercado accionario dado que su confianza en los títulos de renta fija se deteriora, permitiendo que este puede tener mayores valorizaciones. Se debe tomar en cuenta que la tasa de intereses que se está utilizando es la DTF, tasa promedio de captación de depósitos a plazo de 90 días, lo que permite reforzar la idea que ante estímulos de captación por parte de los bancos superiores a los niveles de inflación, los inversionistas podrían tener un incentivo a migrar su capital al ahorro tradicional o a la renta fija disminuyendo la capitalización bursátil del mercado accionario. Por otro lado, podría existir un argumento contrario desde la teoría que indica que si la tasa de interés real es positiva y superior a los niveles internacionales, existe un incentivo claro para el ingreso de los flujos de capitales que pueden ser destinados en inversiones de portafolio y esto podría ser un estímulo para los mercados en general pero especialmente para el de renta fija por la alta demanda que podrían tener títulos, particularmente los del gobierno. Los intereses reales no aparecen en la literatura como una variable que se haya utilizado para la prueba de la aplicación del modelo APT a las diferentes economías. Sin embargo, se han utilizado las tasas de intereses y la inflación (efectivo, esperada y no esperada) por separado como variables que explican el APT o que conforman factores y componentes relevantes para el APT. Algunos de los trabajos que usan por separado las tasas de intereses y la inflación son: Chen, Roll y Ross (1986), para el modelo APT en EEUU e Inglaterra; Hamao (2002), para el mercado de Zimbabwe. S. Dhankar y Singh (2005) utiliza las dos variables para el mercado de la India, sin embargo concluye que son los spreads de las tasas de interés de los depósitos la variable que mayor influencia tienen sobre los retornos de las acciones. Londoño, Lopera y Restrepo (2010)



encuentran una componente de tasas de interés para el mercado colombiano pero no hacen alusión a una componente de precios o a la inflación como una variable relevante en el componente de tasas de interés. Dentro de la revisión son más los trabajos que prueban la relevancia de las tasas de interés que aquellos que no las encuentran importantes para la aplicación del modelo APT.

**CPH:** La Curva de Phillips hace referencia a una relación empírica y negativa entre el desempleo y los niveles de inflación como se explicó anteriormente en la descripción del componente. Entendiendo la disyuntiva entre inflación y desempleo y que en el corto plazo, y asumiendo la validez de la Curva de Phillips, los gobiernos preferirían algún nivel de inflación con el fin de aumentar el empleo, se podría asumir que se espera una relación negativa entre el componente de la curva de Phillips y el exceso del IGBC debido a que disminuciones en el desempleo, podrían estar permitiendo un aumento en el nivel de salarios de la economía que a su vez podría representar: 1) un mayor número de individuos que salen del paro y podrían tener capacidad de consumo y ahorro, 2) Incremento en los niveles de precios de la economía, particularmente el precio de las acciones de empresas públicas que cotizan en el mercado, permitiendo así excesos positivos del IGBC con la representación de la tasa libre de riesgo para Colombia. Sin embargo aclarando que la Curva de Phillips es una relación negativa entre variables existe cierta incertidumbre a priori en el signo que podría presentar este componente dentro del modelo. Como ya se mencionó en el análisis de las tasas de interés reales (IRE), existen múltiples trabajos que incluyen la inflación efectiva, esperada y no esperada dentro de las aplicaciones del modelo APT. Sin embargo ninguno de los estudios realizados hace mención a la Curva de Phillips pero si se menciona el desempleo en algunos casos, tales como Navarro López (2000) y Rjoub, Tursoy y Gunsel (2009) donde se concluye que el empleo no es relevante dentro de la explicación del modelo APT en México y tampoco en Turquía.

**IED:** La inversión extranjera directa como componente que explica el exceso de rendimientos del IGBC tiene un signo esperado positivo y fuerte influencia. Las condiciones del país han favorecido la entrada de flujos de capital, tanto en inversión extranjera directa como en capital destinado a inversiones de portafolio, de hecho algunas de las empresas que hacen parte del IGBC son una muestra de la IED, especialmente en sectores que reflejan la internacionalización del país como el minero, bienes de consumo masivo, servicios financieros. La inversión extranjera directa no se encuentra como componente ni como variable en los estudios realizados, sin embargo, el producto interno bruto si aparece como una de las variables

recurrentes en los modelos donde se aplica el modelo APT y en pocos casos se menciona que no es una variable relevante.

El resumen de los signos esperados y la contribución esperada de los componentes al exceso de rendimiento de IGCB se explican en la siguiente tabla:

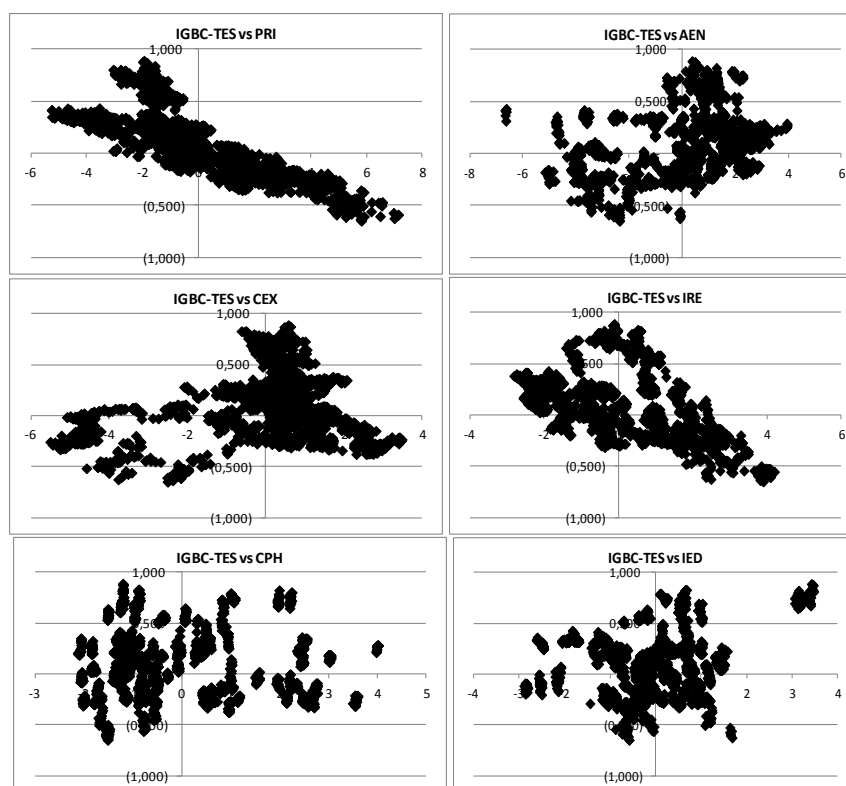
**Tabla 9. Signo y contribución esperada de cada componente / factor**

Componentes	Signo Esperado	Contribución Esperada
PRI	Negativo	Alta
AEN	Positivo	Alta
CEX	Positivo	Alta
IRE	Negativo	Media
CPH	Negativo	Baja
IED	Positivo	Alta

Fuente: Construcción propia

En la siguiente gráfica se puede apreciar la relación entre el exceso de rendimiento del IGBC respecto de cada uno de los componentes retenidos.

**Gráfico 2. IGBC – TES vs. Componentes retenidos.**



#### **4.5. Componentes principales vs. Análisis factorial**

Luego de realizar los análisis factorial y de componentes principales es la elección del método que extraerá los componentes o factores que a la postre se utilizarán como variables de entrada, o variables estructurales en un modelo econométrico. Si bien ambas metodologías son similares, los objetivos de cada una son diferentes; mientras el método de componentes principales analiza la varianza, el análisis factorial analiza la covarianza. “El objetivo del análisis de componentes principales es extraer la máxima varianza de un conjunto de datos con unos cuantos componentes ortogonales. El objetivo del análisis factorial es el de reproducir la matriz de correlación con unos cuantos factores ortogonales. El análisis de componentes principales es una solución matemática única, mientras que muchas formas del análisis factorial no son únicas”<sup>44</sup>.

Como lo anotan Tabachnick y Fidell (2001), la elección entre el análisis de componentes principales y el análisis factorial depende de las metas de la investigación, la evaluación del conjunto de datos disponible y su ajuste con los modelos. Si se está interesado en un resumen empírico del conjunto de datos originales, el análisis de componentes principales es una mejor elección, puesto que fundamentalmente es una reducción del un gran conjunto de variables en un conjunto pequeño de componentes.

Dada la construcción teórica del modelo APT original como una relación lineal entre el rendimiento de un activo financiero y un conjunto de variables originales (macroeconómico y financiero) y de acuerdo a los objetivos de este trabajo, se seleccionaron los componentes principales como variables de entrada del modelo econométrico a estimar, teniendo en cuenta que se dispone de un amplio conjunto de variables, muchas de ellas con una alta correlación; por eso es importante reducir dicho conjunto de variables a unos cuantos componentes incorrelacionados entre sí, que sirvan como variables de entrada del modelo econométrico. Los factores obtenidos sirvieron como una herramienta para corroborar la categorización de los componentes y los resultados obtenidos pueden ser utilizados como variables de entrada en posteriores análisis.

#### **4.6. Estimación del modelo APT a partir de componentes principales**

Se estimó un modelo lineal en el cual la variable dependiente, el exceso de rendimiento del IGBC por sobre el genérico de los títulos de tesorería TES, es una función lineal de una serie de

---

<sup>44</sup> TABACHNICK y FIDELL (2001), pp. 611.

componentes principales y una serie de variables *dummy* para controlar efectos atípicos dentro del periodo analizado. Se definió un nivel de significancia *alpha* del 10%.

En primer lugar se estimó un modelo lineal utilizando los seis componentes extraídos y las cuatro variables *dummy* construidas. A un nivel de significancia del 10% tanto las componentes principales como las variables *dummy* incluidas resultaron significativas, y los signos que las acompañan son los esperados; el  $R^2$  arrojado por el modelo estimado fue de 0,75. Sin embargo, pese a la significancia estadística de las componentes y las variables *dummy*, este modelo presentaba evidentes problemas de autocorrelación (Los resultados del modelo y el correlograma de los residuales puede apreciarse en el anexo 3). En la siguiente tabla se pueden apreciar los coeficientes calculados para el modelo con componentes y *dummies*.

**Tabla 10. Coeficientes calculados para el modelo con componentes y *dummies***

Componente		Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C		0,10389	0,00349	2,98061	0,00000
C1	PRI	-0,11338	0,00185	-6,13088	0,00000
C2	AEN	0,00526	0,00185	2,85333	0,00440
C3	CEX	-0,02067	0,00203	-1,01797	0,00000
C4	IRE	0,01324	0,00277	4,77195	0,00000
C5	CPH	-0,00849	0,00232	-3,66325	0,00030
C6	IED	0,08176	0,00285	2,86535	0,00000
<i>Dummies</i>					
D1		0,13886	0,01679	8,27273	0,00000
D2		-0,13377	0,01596	-8,38297	0,00000
D3		-0,07861	0,01739	-4,52044	0,00000
D4		-0,04625	0,01217	-3,79878	0,00010

Fuente: Construcción propia a través del programa EVIEWS 6 a partir de datos de Bloomberg, DANE, Banrep, Bolsa y Renta.

Posteriormente se modificó el modelo original a fin de corregir el evidente problema de autocorrelación. Los resultados de la estimación se presentan en la siguiente tabla (Ver anexo 4 para apreciar los resultados de la regresión, así como el correlograma de los residuales):

**Tabla 11. Resultados de la estimación del modelo APT bajo componentes principales**

Component		Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C1	PRI	-0,0022	0,0004	-4,9352	0,0000
C2	AEN	-0,0005	0,0002	-1,9368	0,0529
C3	CEX	-0,0006	0,0002	-2,3708	0,0178
C4	IRE	0,0007	0,0003	2,0276	0,0427
C6	IED	0,0012	0,0004	3,2225	0,0013
IGBC_TES(-1)		0,9883	0,0023	4,2604	0,0000
AR(1)		0,1259	0,0410	3,0689	0,0022

Fuente: Construcción propia a través del programa EVIEWS 6 a partir de datos de Bloomberg, DANE, Banrep, Bolsa y Renta.

A un nivel de significancia del 10% se encontró que cinco de los seis componentes que caracterizan la base de datos de variables originales, resultaron significativos para explicar el exceso de rendimiento del IGBC por sobre los TES. El único componente que resultó no significativo fue el caracterizado como Curva de Phillips (CPH).

Asimismo se encontró que, como variables de control, las *dummies* incluidas para capturar los efectos atípicos dentro del periodo de análisis resultaron no significativas al nivel de significancia elegido. También, con el objetivo de que los residuales de la regresión se comportaran como ruido blanco, se incluyeron como variables de control la variable dependiente rezagada un periodo y un proceso autorregresivo de orden 1 para modelar el comportamiento de los residuales. Desde el funcionamiento de los mercados financieros, es apenas comprensible que el comportamiento de un índice accionario dependa en alguna medida del comportamiento que dicho índice haya tenido en el periodo anterior.

El coeficiente de determinación  $R^2$  arrojó un valor de 0,99, resultado que puede ser explicado por la inclusión del AR (1) y el rezago del exceso de rendimiento del IGBC.

Adicionalmente se encontró que las variables independientes en su conjunto son estadísticamente significativas.

En el modelo APT original con variables, los parámetros pueden ser interpretados como elasticidades; esto no es posible de afirmar al estimar un modelo con componentes principales. Para tener algún criterio de comparación se realizó la estandarización de los coeficientes obtenidos; de esta manera se pueden establecer relaciones y comparaciones entre ellos.

Valga la pena destacar que la estimación se realizó bajo la metodología de mínimos cuadrados ordinarios, a través de una estimación consistente de White para corregir los problemas de heterocedasticidad que se presentaron.

**Tabla 11. Coeficientes estandarizados<sup>45</sup>**

Component		Coefficient	Std. Coeff
C1	PRI	-0,002168	-0,016297
C2	AEN	-0,000482	-0,003278
C3	CEX	-0,000583	-0,003397
C4	IRE	0,000702	0,003680
C6	IED	0,001232	0,004350

Fuente: Construcción propia

## V. Conclusiones

Al analizar los resultados del modelo estimado se puede concluir que, dentro del periodo analizado, hay evidencia para afirmar que existen varios factores que explican el exceso de rendimiento del IGBC, que se resumen en los cinco componentes principales que resultaron estadísticamente significativos. Tal como se ha mencionado a lo largo de este trabajo, dichos componentes pueden ser categorizados fácilmente, de acuerdo a la importancia relativa que el conjunto de variables originales tienen dentro de ellos.

En primer lugar se puede identificar con claridad un componente que recoge la percepción de riesgo de los agentes en el mercado. La evidencia muestra que dicho componente es el más importante para explicar el exceso de rendimiento del IGBC (siendo por mucha diferencia el mayor coeficiente estandarizado calculado). El signo negativo obtenido para este parámetro es consecuente con la teoría económica y financiera que señala una relación inversa entre el rendimiento y la percepción de riesgo de los activos financieros; es decir, ante un incremento en la percepción de riesgo, los agentes prefieren tomar posiciones de venta en activos riesgosos como las acciones, lo que sin duda afecta su rendimiento, y tomar posiciones largas en activos que los agentes pueden considerar como refugio. Además desde el punto de vista práctico, los resultados son consecuentes con la realidad del mercado accionario, considerando que los movimientos recientes más abruptos han sido generados por eventos de riesgo mundial como la crisis financiera de 2008 y la crisis crediticia europea que han sido acompañadas, a su vez, por recuperaciones impulsadas por una recuperación de la confianza de los inversionistas, lo que a su vez implica que a medida que la percepción de riesgo aumenta y los seguros empiezan a subir de valor, el mercado accionario cae; de igual manera, cuando la percepción del riesgo disminuye, los seguros contra riesgo disminuyen de valor y el mercado accionario por

<sup>45</sup> La estandarización se realiza siguiendo la fórmula  $\beta_j^* = \beta_j \frac{SD_{X_j}}{SD_{Y_i}}$ , donde  $\beta_j^*$  es el parámetro estandarizado y  $\beta_j$  es el parámetro obtenido de la regresión. SD es la desviación estándar.

su parte responde positivamente. Trabajos como el de Londoño, Lopera y Restrepo (2010) arrojan resultados similares.

En segundo lugar, es de resaltar el resultado obtenido para el componente identificado con la actividad económica nacional. De un lado, la evidencia muestra que su importancia relativa para explicar el rendimiento en exceso del IGBC es baja en relación con los demás componentes que resultaron significativos, y de otro el signo negativo que acompaña al parámetro es opuesto al esperado y en principio contrario a la teoría económica y financiera. Una explicación razonable a este fenómeno es el rezago con el que se publica esta información frente a otras medidas que indican con mayor anticipación los ciclos económicos, como por ejemplo la evolución de la cartera de créditos y los resultados trimestrales de las compañías que componen el IGBC, los cuales permiten interpretar la fortaleza de la economía antes de que el DANE publique sus datos. Los inversionistas toman decisiones de inversión basados en expectativas futuras y en la mayoría de los casos se adelantan a los cambios económicos, lo que puede dar ocurrencia a eventos donde si bien la economía esté mostrando signos de fortaleza, los inversionistas pueden estar tomando decisiones de inversión previendo un escenario económico difícil y viceversa. Estos resultados darían evidencia del comportamiento contracíclico del mercado accionario frente al comportamiento económico. Chen (1991), también encontró una correlación negativa entre los retornos y el crecimiento económico reciente y una correlación positiva de los retornos con el crecimiento económicos futuro, lo que da soporte a los resultados obtenidos.

En tercer lugar se identificó como variable explicativa del exceso de rendimiento del IGBC un componente caracterizado como comercio exterior. En principio, se esperaba que este componente tuviera signo positivo debido al peso tan importante que tienen las petroleras dentro del IGBC<sup>46</sup>. Sin embargo el signo que acompaña a este coeficiente es negativo. La explicación a este resultado puede encontrarse en dos de las variables que caracterizan este componente: el oro y el tipo de cambio peso/dólar. El oro por ser un activo refugio, está negativamente correlacionado con el mercado accionario, mientras que para el caso de la tasa de cambio una apreciación del peso puede estar relacionada con incrementos en el rendimiento de los activos que se negocian en bolsa, así como de la entrada de flujos de inversión al país que pueden ser conducidas a inversiones en el mercado accionario.

---

<sup>46</sup> Es de anotar que la mayoría de las exportaciones tradicionales colombianas corresponden a los sectores petrolero y minero.

Se caracterizó también un componente identificado como intereses reales, que incluye una *proxy* de las tasas en la economía y medidas de inflación. Como se mencionó en la sección de resultados esperados es difícil determinar el signo que debería tener dicho parámetro pues desde la teoría económica se pueden encontrar argumentos tanto para un signo positivo como para uno negativo. El signo arrojado por la regresión lineal fue positivo. Esta relación positiva entre el componente de intereses reales y el exceso de rendimiento del IGBC puede ser explicada como un incentivo que tienen los agentes a invertir en países cuyo nivel de tasas de interés sea superior al nivel promedio internacional, como es el caso de Colombia. De otro lado, un segundo argumento a favor de este resultado, es que una tendencia alcista de la DTF y de la inflación es síntoma de que la economía está experimentando una apreciación de los bienes y servicios, lo que beneficia positivamente el rendimiento del mercado accionario ya que es un reflejo de la fortaleza del consumo y mayor capacidad de ahorro de los hogares que se traduce en una mayor capacidad de inversión.

Valga la pena anotar que la importancia relativa de los componentes caracterizados como actividad económica nacional, comercio exterior e intereses reales para la explicación del exceso de rendimiento del IGBC es baja en relación con la importancia que puede atribuirse al componente de percepción del riesgo.

Un último componente que pudo ser caracterizado y resultó significativo para la explicación del exceso de rendimiento del IGBC fue el referente a la Inversión Extranjera Directa. El signo arrojado por la estimación fue positivo, lo cual era de esperarse desde la teoría económica y financiera. El aumento en la IED indica varias cosas, como que el perfil de riesgo es menor y eso posibilita que más inversionistas quieran invertir en Colombia, lo que a su vez pone al mercado accionario local dentro del mapa de los inversionistas globales. En la práctica se ha comprobado este efecto, ya que en los dos últimos años la IED ha alcanzado nuevos máximos y esto también se ha evidenciado en la creciente participación que han ganado los extranjeros como inversionistas en el mercado local, en 2010, 2011 y lo corrido de 2012 los extranjeros se han ubicado en los principales flujos de inversión del mercado local. El Efecto de la IED también se puede percibir en otros aspectos como en el impacto que ha tenido en el sector de hidrocarburos en los últimos años, gracias a esta inversión se ha dinamizado ese sector y se han creado y listado compañías en Bolsa como Pacific Rubiales que han dinamizado el mercado accionario, compañías de gran peso como Ecopetrol han mejorado las técnicas de recuperación de crudos gracias a los socios extranjeros beneficiando los resultados de la



compañía e impulsando su valorización. Asimismo es de resaltar que el componente caracterizado como Inversión Extranjera Directa resultó el segundo en importancia relativa para la explicación del exceso de retorno del IGBC, sólo superado por la percepción de riesgo.

Se puede concluir que el componente más relevante para determinar el exceso de rendimiento del mercado accionario colombiano es la percepción de riesgo, ya que este impacta directamente la predisposición de los agentes para tomar posiciones más o menos riesgosas en el mercado, lo que afecta significativamente los rendimientos de las acciones. La evidencia encontrada para el mercado accionario colombiano sugiere que los inversionistas deberían poner especial énfasis en el seguimiento de medidas de percepción de riesgo tales como el VIX, los CDS, el EMBI y el comportamiento de los mercados emergentes. Asimismo, los administradores de portafolio deberían otorgar una mayor ponderación al riesgo como la variable más importante a la hora de tomar decisiones de inversión, frente a otro tipo de estrategias enfocadas en valor (*value*) o crecimiento (*growth*). La evidencia confirma también la percepción que se tiene en el mercado de que mayores flujos de Inversión Extranjera Directa, dirigidos especialmente a los sectores petrolero y minero, redundará en un mayor dinamismo y valorización de las acciones de dichos sectores, que representan más de la mitad de la composición del IGBC. La evidencia encontrada en este trabajo aporta luces sobre los factores que tanto inversionistas como administradores de portafolio deben ponderar en mayor medida a la hora de analizar las posibilidades de inversión en el mercado accionario colombiano.

## VI. Bibliografía

ABEYSEKERA, Sarath & MAHAJAN, Arvind (1987). *A test of the APT in pricing UK Stocks*. Journal of Business Finance and Accounting, Vol. 14, Nro. 3.

ARRIETA, Jaime E., TORRES, Juan C. y VELÁSQUEZ, Hermilson. (2009). *Predicción del comportamiento diario de la acción de SURAMINV: Redes neuronales y modelos econométricos*. Tesis Maestría en Finanzas, Universidad EAFIT.

BONTAS, Alexandra & ODAGESCU, Ioan (2011). *Testing APT Model upon a BVB Stocks' Portfolio*. Informatica Economica, Vol. 15, Nro.4.

BURMEISTER, Edwin. & McELROY, Marjorie. (1988). *Joint Estimation of Factor Sensitivities and Risk Premia for The Arbitrage Pricing Theory*. Journal of Finance, Vol. 43, Nro.3.

CH'NG, Huck y G.S., Gupta (2001). *A Test of Arbitrage Pricing Theory: Evidence From Malaysia*. Asia Pacific Journal of Economics & Business. Vol.5, Nro.1.

CHEN Nai-Fu, ROLL Richard and ROSS Stephen A.. (1986). *Economic Forces and the Stock Market*. The Journal of Business, Vol. 59, No. 3

CHEN, Nai-Fu (1983). *Some Empirical tests of the APT*. The Journal of Finance, Vol. 38, No. 5.

CHEN, Nai-Fu (1991). *Financial Investment Opportunities and the Macroeconomy*. The Journal of Finance. Vol. XLVI, Nro. 2.

CONNOR, G. & KORAJCZYK, R. A. (1988) *Risk and return in an equilibrium APT: Application of a new test methodology*. Journal of Financial Economics , Vol. 21, Nro.2.

DHANKAR, R. S. and SINGH, R. (2005). *Arbitrage Pricing Theory and The Capital Asset Pricing Model- Evidence From The Indian Stock Market*. Journal of Financial Management & Analysis, Vol. 18,Nro.1.

FAFF, R. W. (1988). *An empirical test of the Arbitrage Pricing Theory on Australian Stock returns*. Accounting and Finance , Vol. 28, Nro.2.

FAFF, R.W. (1992). *A multivariate test of an equilibrium APT with time varying risk and risk premia in the Australian equity market*. Australian Journal of Management, Vol. 17.

FEBRIAN, Erie & HERWANY, Aldrin (2010). *CAPM and APT Validation Test Before, During, and After Financial Crisis in Emerging Market: Evidence from Indonesia*. The International Journal of Business & Finance Research, Vol.10, No. 1.

HAMAO, Yasushi (1988). *An empirical examination of the Arbitrage Pricing Theory: Using Japanese data*. Japan and the World Economy, Vol.1, Nro.1

HUBERMAN, Gur and WANG, Zhenyu (2006). *Arbitrage Pricing Theory*. Federal Reserve Bank of New York Staff Reports. Staff Report No. 216.

KAISER, H. F. (1960). *The application of electronic computers to factor analysis*. Educational and Psychological Measurement, Vol. 20, No. 1.

LONDOÑO, Charle; LOPERA, Mauricio y RESTREPO, Sergio (2010). *Teoría de precios de arbitraje. Evidencia empírica para Colombia a través de redes neuronales*. Revista de Economía del Rosario. Vol. 13, Nro.1.

MARTINEZ, M. & RUBIO, G. (1989). *Arbitrage pricing with macroeconomic variables: an empirical investigation using Spanish data*. Working paper, European Finance Association, Universidad Del Pais Vasco, Bilbao.

NAVARRO LÓPEZ, Cora Marcela (2000). *El APT Evidencia Empírica para México*. Tesis de grado, Maestría en Finanzas del ITESM, Campus Monterrey. Revista Transferencia, Vol. 13, Nro. 49.

OYAMA, Tsuyoshi (1997). *Determinants of Stock Prices: The Case of Zimbabwe*. IMF Working Paper, Nro. 97 / 117

POON, S. & TAYLOR, S.J. (1991). *Macroeconomic factors and the UK stock market*, Journal of Business Finance & Accounting , Vol. 18 No. 5.

REINGANUM, Marc (1981). *The Arbitrage Pricing Theory: Some Empirical Results*. Journal of Finance, Vol. 36, Nro. 2.

REISMAN, Haim (2002). *Some comments on the APT*. Quantitative Finance: Taylor and Francis Journals, Vol. 2, Nro. 5.

RJOUB, Husam, TURSOY, Turgut & GUNSEL, Nil (2009). *The Effects of Macroeconomic Factors on Stock Returns: Istanbul Stock Market*. Studies in Economics and Finance, Vol. 26 No. 1.

ROLL, Richard and ROSS, Stephen A. (1980). *An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory*. The Journal of Finance, Vol. 35, No. 5.

ROSS, Stephen A., (1976). *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*. Journal of Economic Theory, Nro. 13, pp. 341 – 360.

SABETFAR, Pooya, FAN FAH, Cheng & MOHD, Shamsheer (2012). *Common risk factors in the returns of non oil based stocks in Tehran Stock Exchange: The case of close economy*. African Journal of Business Management, Vol.6, Nro.25

SENTANA, Enrique & FIORENTINI, Gabriele (2001). *Identification, estimation and testing of conditionally heteroskedastic factor models*. Journal of Economics, Vol. 102, Nro.2.

SHARPE, William. F (1982). *Factors in New York Stock Exchange Security Returns. 1931 – 1979*. Journal of Portfolio Management. Vol. 8, Nro. 4.

TABACHNICK, Barbara G. and FIDELL, Linda S. (2001). *Using Multivariate Statistics*. 4<sup>th</sup> Edition; Allyn & Bacon.

URIEL, Ezequiel y ALDÁS, Joaquín (2005). *Análisis Multivariante Aplicado*. Thompson.